

Θαυρία Αποφάσεων Bayes

Ελεγχοί Στατιστικών Υποθέσεων.

Περιοχή απορρίψης.

Α) Ισχυρότατο τεστ (επινέδου $\alpha=5\%$)

$$\frac{L_0}{L_1} = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i/\theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i/\theta_1)} \leq K, \quad K \text{ τ.ω } P(\text{απορ } H_0/\theta=\theta_0) = \alpha$$

Β) Test Minimax

$$\frac{L_0}{L_1} \leq K, \quad \text{όπου } K \text{ τ.ω } K_1 P(\text{απορ } H_0 / H_0 \text{ αληθ}) = K_0 P(\text{απορ } H_0 / H_0 \text{ αλθθ})$$

Γ) Bayes test.

$$\frac{L_0}{L_1} \leq K, \quad \text{όπου } K = \frac{L(\theta_1, d_0) j(\theta_1)}{L(\theta_0, d_1) j(\theta_0)}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Έστω τὸ $X_1, \dots, X_n$ ἀπὸ τὴν $f(x|\theta) = \theta \cdot e^{-\theta x} \quad x > 0$.

Να βρεθεῖ τὸ minimax τεστ γιὰ τὸν ἐλεγχὸ τῆς $H_0: \theta = \theta_0$
ἐναντὶ τῆς

καὶ σὴν συνέχεια νὰ ἐξεταστεῖ ἡ περίπτωση

$H_{a1}: \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > \theta_0)$

ὅπου $n=1$ καὶ $L(\theta_0, d_1) = L(\theta_1, d_0)$
(K_1) (K_0)

καὶ $\theta_0=1, \theta_1=2$.

Λύση

Θα ἔχουμε ὅτι $\frac{L_0}{L_1} = \frac{\theta_0^n e^{-\theta_0 \sum x_i}}{\theta_1^n e^{-\theta_1 \sum x_i}}$ ἐπομένως

$$\frac{L_0}{L_1} \leq K \Rightarrow \frac{\theta_0^n e^{-\theta_0 \sum x_i}}{\theta_1^n e^{-\theta_1 \sum x_i}} \leq K \Rightarrow e^{-(\theta_0 - \theta_1) \sum x_i} \leq \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(\theta_0 - \theta_1) \sum x_i \leq \ln \left[\left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n k \right] \Rightarrow \sum x_i \leq \frac{\ln \left[\left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n k \right]}{(\theta_1 - \theta_0)} = k^*$$

Επίσης γυρνάμε για το minimax τεστ όπου το k επιλέγεται έτσι ώστε να ισχύει

$$R(\theta_0, d_1) = R(\theta_1, d_0) \Rightarrow k_1 P_{\theta_0}(d = d_1) = k_0 P_{\theta_1}(d = d_0)$$

$$\Rightarrow k_1 P_{\theta_0}(\sum x_i \leq k^*) = k_0 P_{\theta_1}(\sum x_i > k^*)$$

Παράλληλα θα είναι $X_i \sim \text{Exp}(\theta) \equiv \text{Gamma}(1, 1/\theta)$
 οπότε και $T = \sum X_i \sim \text{Gamma}(n, 1/\theta)$

Επομένως θα έχουμε

$$k_1 \int_0^{k^*} \frac{\theta_0^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\theta_0 t} dt = k_0 \int_{k^*}^{+\infty} \frac{\theta_1^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\theta_1 t} dt$$

Στην περίπτωση όπου $n=1$, $k_0=1=k_1$, $\theta_0=1$, $\theta_1=2$ θα έχουμε

$$e^{-\theta_1 k^*} + e^{-\theta_0 k^*} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-2k^*} + e^{-k^*} - 1 = 0. \Rightarrow \text{Θέτουμε } e^{-k^*} = y$$

$$\text{και θα είναι } y^2 + y - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 1+4=5} y_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ απορρ.}$$

$$\text{Επομένως } e^{-k^*} = y_1 \Rightarrow e^{-k^*} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k^* = -\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Παράδειγμα 3 Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από $N(\theta, 1)$

$$\mu \in K_0 = K_1 = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad f(\theta_1) = f(\theta_0) = \frac{1}{2}$$

Ναι βρεθεί το τεστ Bayes για τον έλεγχο της $H_0: \theta = \theta_0$
 $H_1: \theta = \theta_1, (\theta_1 > \theta_0)$

Λύση

$$\text{Θα είναι} \quad \frac{L_0}{L_1} \leq K \Rightarrow \frac{L_0}{L_1} \leq \frac{1/2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum (x_i - \theta_0)^2 - \sum (x_i - \theta_1)^2 \right] \right\} \leq 1 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \left[\sum (x_i - \theta_0)^2 - \sum (x_i - \theta_1)^2 \right] \leq 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \left[\sum x_i^2 - 2\theta_0 \sum x_i + n\theta_0^2 - \sum x_i^2 + 2\theta_1 \sum x_i - n\theta_1^2 \right] \leq 0$$

$$(\theta_0 - \theta_1) \sum x_i - \frac{n}{2} (\theta_0^2 - \theta_1^2) \leq 0 \Rightarrow (\theta_0 - \theta_1) \sum x_i - \frac{n}{2} (\theta_0 - \theta_1) (\theta_0 + \theta_1) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum x_i \geq \frac{n}{2} (\theta_0 + \theta_1) = \frac{n(\theta_0 + \theta_1)}{2}}$$

Παράδειγμα 4 Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από $f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$

$$\mu \in f(\theta_0) = \frac{2}{3} \quad f(\theta_1) = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad K_0 = K_1$$

Ναι βρεθεί το τεστ του Bayes για το έλεγχο της

$$H_0: \theta = 1 \quad \text{καθώς και η ισχύς του τεστ}$$

$$H_1: \theta = 2$$

Λύση

$$\text{Θα έχουμε ότι} \quad \frac{L_0}{L_1} = \frac{\theta_0^n e^{-\theta_0 \sum x_i}}{\theta_1^n e^{-\theta_1 \sum x_i}} = \left(\frac{1}{2} \right)^n e^{-\sum x_i + 2 \sum x_i} = \left(\frac{1}{2} \right)^n e^{\sum x_i}$$

$$\text{Επομένως θα είναι} \quad \frac{L_0}{L_1} \leq K \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^n e^{\sum x_i} \leq \frac{f(\theta_1) K}{f(\theta_0) K} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2^n} e^{\sum x_i} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\sum x_i} \leq 2^{n-1} \Rightarrow \boxed{\sum x_i \leq (n-1) \ln 2}$$

Όσον αφορά την ισχύς του ΤΕΟΤ, θα έχουμε ότι

$$\gamma = 1 - \beta = 1 - P(\text{αποδ } H_0 / H_0 = \text{αληθής}) = 1 - P(\sum X_i > (n-1) \ln a / \theta = 2)$$

Παράλληλα είναι $X_i \sim \text{Εκθ}(\theta=2) \equiv \text{Gamma}(1, \frac{1}{2})$

$$\Rightarrow T = \sum X_i \sim \text{Gamma}(n, \frac{1}{2})$$

Επομένως θα είναι:

$$\gamma = 1 - \int_{(n-1) \ln a}^{+\infty} \frac{2^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-2t} dt = \int_0^{(n-1) \ln 2} \frac{2^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-2t} dt.$$

Παραδειγμα 5 Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από $\text{Εκθ}(\theta)$

εάν ισχύει ότι $k_0 = L(\theta_0, d_0) = L(\theta_0, d_1) = k_1$, $f(\theta_0) = \frac{1}{2}$, $f(\theta_1) = \frac{1}{4}$

και $n=2$, να βρεθεί το Bayes test για τον έλεγχο της $H_0: \theta_0=1$

$H_1: \theta_1=2$

$\hookrightarrow X_1, X_2$. και η ισχύς αυτού.

Λύση

Εφόσον $X_i \sim \text{Εκθ}(\theta) \quad f(x_i) \equiv \text{Gamma}(1, \frac{1}{\theta})$.

$$\frac{L_0}{L_1} = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1)} = \dots \quad (\text{όπως πριν. Παραδειγμα 4})$$

$$\leq K = \frac{f(\theta_1) k_0}{f(\theta_0) k_1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sum X_i \leq (n-1) \ln 2$$

$$k.n: \quad \overset{n=2}{X_1 + X_2 \leq (2-1) \ln 2} = \boxed{X_1 + X_2 \leq \ln 2}$$

Για ισχύς ακριβώς όπως παραδειγμα 4.

για $n=2$